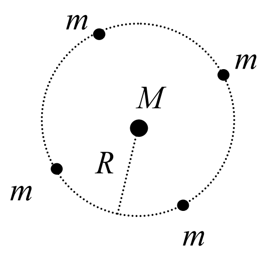
63-osios Lietuvos mokinių fizikos olimpiados

12 klasės

Teorinių užduočių sprendimai

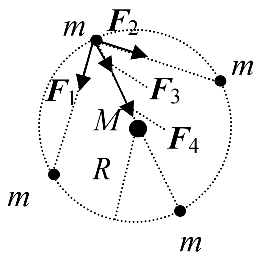
1 uždavinys

Žvaigždžių sistemą sudaro 5 žvaigždės, iš kurių keturios turi vienodas mases *m* ir skrieja *R* spindulio apskritimo orbita apie pektąją masės *M* žvaigždę, esančią to apskritimo centre (žiūr. brėž.). Skriejančios žvaigždės visą laiką išsidėsčiusios vienodais atstumais viena nuo kitos. Koks šių žvaigždžių sukimosi periodas?



Sprendimas

Panagrinėkime vieną iš skriejančių žvaigždžių. Ją veikia įcentrinė jėga, kurią sudaro likusių keturių žvaigždžių gravitacijos traukos jėgų F_1, F_2 (gretimos kaimynės), F_3 (žvaigždė priešingoje orbitos skersmens pusėje) ir F_4 (centre esančios žvaigždės jėga) vektorių suma (žiūr. brėž.). Ši atstojamoji jėga visuomet nukreipta į centrą. (2 taškai)



Atstumas tarp gretimų *m* masės žvaigždžių $l = \sqrt{2}R$. (1 taškas).
Tada

$$F_1 = F_2 = G\frac{m^2}{2R^2}$$, čia *G* – gravitacijos konstanta.

$$F_3 = G\frac{m^2}{4R^2}. \quad F_4 = G\frac{mM}{R^2}.$$ (2 taškai)

Suprojektavę šias jėgas į kryptį, jungiančią nagrinėjamą žvaigždę ir centre esančią žvaigždę, randame įcentrinę jėgą:

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{m}{R^2}\left(M + \frac{m}{4} + \frac{m\sqrt{2}}{2}\right).$$ (2 taškai)

Iš čia $v = \sqrt{\dfrac{G\left(M + \frac{m}{4} + \frac{m\sqrt{2}}{2}\right)}{R}}$. (1 taškas)

Visos *m* masės žvaigždės sukasi periodu

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{G\left(M + \frac{m}{4} + \frac{m\sqrt{2}}{2}\right)}}.$$ (2 taškai)

2 uždavinys

Nedidelių matmenų masės m = 100 g rutuliukas pritvirtintas prie lengvo netąsaus siūlo, kuris kartu su rutuliuku atlenkiamas į horizontalią padėtį ir be pradinio įtempimo kartu su rutuliuku paleidžiamas. 1) Kokia siūlo įtempimo jėga T_1 tuo momentu, kai siūlas tampa vertikalus? 2) Siūlas pakeičiamas lengva gumele, kurios standumas k = 20 N/m, ir procesas kartojamas. Kokia šiuo atveju gumelės įtempimo jėga T_2, kai gumelė tampa vertikali? Tuo momentu išsitempusios gumelės ilgis l = 1,8 m, o rutuliuko greitis v = 4,0 m/s.

Sprendimas

1) Jei siūlo ilgis l_0, tai tada, kai siūlas vertikalus, įcentrinei jėgai

$\frac{mv^2}{l_0} = T_1 - mg$.   (2 taškai)

Iš mechaninės energijos tvermės dėsnio:

$\frac{mv^2}{2} = mgl_0$. (1 taškas)   Iš šių lygčių gauname: $T_1 = 3mg = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 9{,}81 = 2{,}94$ N. (2 taškai)

2) Šiuo atveju naudojamės energijos tvermės dėsniu (beje, bendru atveju greičio $\boldsymbol{v}$ kryptis nėra horizontali):

$mgl = \frac{mv^2}{2} + \frac{k(l - l_0)^2}{2}$.   (2 taškai)

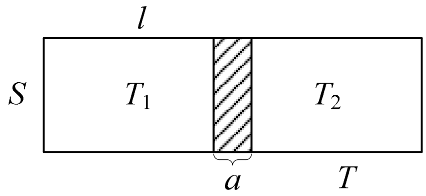
Čia l_0 – neištemptos gumelės ilgis. Kai gumelė vertikali, jos įtempimo jėga lygi

$T_2 = k(l - l_0)$.   (1 taškas)

Iš šių dviejų lygčių randame $T_2 = \sqrt{mk(2gl - v^2)} = \sqrt{0{,}1 \cdot 20 \cdot (2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}8 - 4^2)} = 6{,}22$ N. (2 taškai)

3 uždavinys

Uždaras vidinio $l = 22\,\text{cm}$ ilgio ir $S = 30\,\text{cm}^2$ skerspjūvio ploto cilindras yra pertvertas $a = 2\,\text{cm}$ storio $P = 30\,\text{N}$ svorio ritinine pertvara, kuri jame gali slankioti be trinties ir nepraleidžia oro. Cilindrui esant horizontalioje padėtyje pertvara yra jo viduryje, o abiejose pusėse yra $p = 100\,\text{kPa}$ slėgio oras, kurio absoliučioji temperatūra vienoje pusėje yra 1,1 karto didesnė, o kitoje - tiek pat kartų mažesnė nei palaikoma pastovia patalpos temperatūra. Cilindras yra pastatomas vertikaliai taip, kad šiltesnis oras būtų žemiau nei šaltesnis. Dėl šilumos mainų per cilindro sieneles šiltesnis oras atauš, o šaltesnis sušils iki patalpos temperatūros. Kiek milimetrų nuo cilindro vidurio tada bus pasislinkusi pertvara?

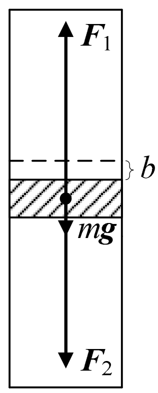


Sprendimas

Pasižymime duotus dydžius: $l = 22\,\text{cm} = 0{,}22\,\text{m}$; $S = 30\,\text{cm}^2 = 0{,}003\,\text{m}^2$; $a = 2\,\text{cm} = 0{,}02\,\text{m}$; $P = 30\,\text{N}$; $p = 100\,\text{kPa} = 1 \cdot 10^5\,\text{Pa}$; $T_1 = 1{,}1T$; $T_2 = T/1{,}1$.

Turime rasti b.

Braižome brėžinį.   (1 taškas)



Buvęs šiltesnis oras cilindre aušdamas traukiasi, o pastačius jį vertikaliai yra dar suspaudžiamas svorio $P = mg$ stūmokliu, kurio pusiausvyros sąlyga pagal pirmąjį Niutono dėsnį:

$$\boldsymbol{mg} + \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0;\ -P + p_1S - p_2S = 0\,, \quad \text{(2 taškai)} \qquad (1)$$

čia p_1 ir p_2 yra oro slėgiai po pertvara ir virš jos, atitinkamai.

Pagal Klapeirono lygtį orui atskirose cilindro dalyse:

$$\frac{p\cdot 0{,}5(l-a)S}{T_1} = \frac{p_1[0{,}5(l-a)-b]S}{T};\ \frac{p\cdot 0{,}5(l-a)S}{T_2} = \frac{p_2[0{,}5(l-a)+b]S}{T}. \quad \text{(2 taškai)} \qquad (2)$$

Įrašę slėgius p_1 ir p_2 iš (2) į (1) lygtį gauname:

$$-\frac{P}{S} + \frac{0{,}5p(l-a)T}{[0{,}5(l-a)-b]T_1} - \frac{0{,}5p(l-a)T}{[0{,}5(l-a)+b]T_2} = 0. \quad \text{(2 taškai)} \qquad (3)$$

Įrašę sąlygos duomenis į (3) lygtį turime kvadratinę lygtį

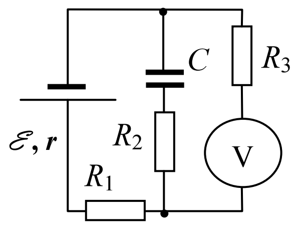
$$-1 + \frac{1}{(0{,}1-b)1.1} - \frac{1{,}1}{0{,}1+b} = 0;\ 1{,}1b^2 + 2{,}21b - 0{,}032 = 0\,, \quad \text{(2 taškai)} \qquad (4)$$

kurios sprendinys

$$b = \frac{-2{,}21 + \sqrt{2{,}21^2 + 4\cdot 1{,}1\cdot 0{,}032}}{2\cdot 1{,}1} \approx 14{,}4\,(\text{mm}). \quad \text{(1 taškas)} \qquad (5)$$

4 uždavinys

Ką rodo voltmetras su vidine varža R_v, jei jis įjungtas į duotą grandinę (žiūr. pav.)? Kitų grandinės elementų parametrai nurodyti paveiksle. Koks krūvis susikaupia kondensatoriuje?



Srendimas

Nusistovėjus pusiausvyrai rezistoriumi R_2 srovė neteka. Taigi srovė grandinėje teka tik nuosekliai sujungtais R_1, voltmetru (jo varža R_v) ir R_3. Srovės stipris lygus $I = \dfrac{\mathscr{E}}{R_1 + R_v + R_3 + r}$. Tada voltmetras rodo jam tenkančią įtampą $U_v = \dfrac{\mathscr{E}R_v}{R_1 + R_v + R_3 + r}$.

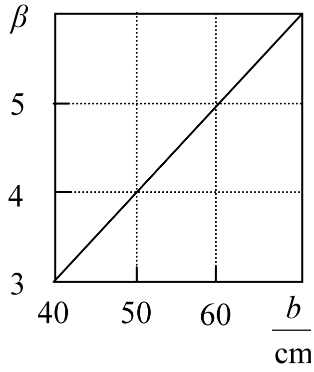
Rezistoriumi R_2 srovė neteka , todėl apatinė kondensatoriaus plokštelė turi tokį pat potencialą, kaip ir R_1, R_2 ir voltmetro sujungimo taškas. Tuo būdu kondensatorius turi įtampą, kuri tenka rezistoriui R_3 ir nuosekliai sujungtam voltmetrui (jo varža R_v). Taigi

$$U_C = \frac{\mathscr{E}(R_v + R_3)}{R_1 + R_v + R_3 + r}.$$

Tada kondensatoriaus krūvis $q_C = \dfrac{\mathscr{E}(R_v + R_3)C}{R_1 + R_v + R_3 + r}$.

5 uždavinys

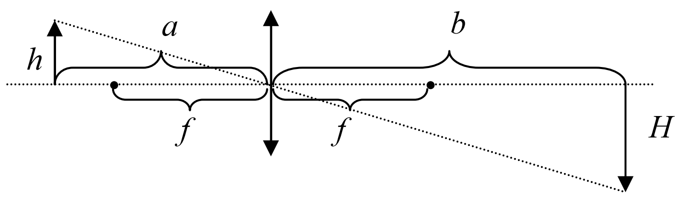
Plonu lęšiu gaunamas objekto atvaizdas ekrane. Didinimo β priklausomybė nuo atstumo tarp lęšio ir ekrano b parodyta pav. Rasti lęšio židinio nuotolį f. 2) Nubrėžti grafinę didinimo β priklausomybę nuo atstumo tarp lęšio ir objekto a srityje, kurioje $\beta > 1$.



Sprendimas

1) Lęšis glaudžiamasis, atvaizdas tikras, todėl lęšio formulė

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$. (1 taškas)



Spindulių eiga parodyta pav.

Pav. – (2 taškai).

Iš čia aišku, kad $\beta = \frac{H}{h} = \frac{b}{a}$. (2 taškai)

Iš lęšio formulės $a = \frac{bf}{b-f}$. Tada $\beta = \frac{b-f}{f}$. Pasinaudoję grafiku (pvz., kai b = 60 cm, β = 5) randame $f = 10$ cm. (2 taškai)

2) Buvome radę $\beta = \frac{b}{a}$. Iš tos pačios lęšio formulės randame $b = \frac{af}{a-f}$.

Tada $\beta = \frac{f}{a-f}$. (1 taškas)

Čia aišku, kad $\beta < 1$, kai $f < a < 2f$, t.y. 10 cm< a < 20 cm. Tai dalis hiperbolinės priklausomybės, parodytos pav.

(2 taškai)